

2. ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN UN MEDIO CONTINUO

2.1 Problemas básicos de la mecánica de suelos

Con los conocimientos de la mecánica de suelos se intenta resolver los tres tipos básicos de problemas relacionados a continuación:

- a. La estabilidad.
- b. La deformación.
- c. El movimiento del agua.

2.1.1 Estabilidad

La primera clase de problemas se resuelve cuando se determina el estado inicial de esfuerzos existente en la masa de suelo, al que luego se le adiciona el incremento de esfuerzos que causan las cargas externas de una obra de ingeniería para hallar el estado final de esfuerzos. Si se supone un modelo adecuado, se puede encontrar la capacidad portante que ofrece el suelo, y en consecuencia, se podrá cargar el suelo hasta un nivel de esfuerzos que ofrezca un factor de seguridad confiable contra la falla.

2.1.2 Deformación

La segunda clase de problemas se resuelve cuando se estiman los asentamientos y las deformaciones que sufrirá la masa de suelo bajo las cargas de la obra, de acuerdo con el tipo de fundación adoptado y las propiedades físicas del subsuelo. Se modifican las características de la cimentación para lograr que los asentamientos sean inferiores a los valores tolerables por la estructura, por las edificaciones vecinas, o por las normas de construcción existentes.

2.1.3 Movimiento del agua

La tercera clase de problemas tiene que ver con la variación de las presiones en el agua que produce su movimiento a través de los poros del suelo, de acuerdo con unas condiciones definidas por la hidrogeología del sitio, y por lo tanto, con los cambios que se producen en los esfuerzos efectivos o intergranulares. Estos esfuerzos son los que controlan la resistencia al corte y los cambios de volumen del suelo.

2. ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN UN MEDIO CONTINUO

2.2 Definición de esfuerzo

2.2.1 En mecánica elemental

En la mecánica elemental el esfuerzo se define como la fuerza interna transmitida por unidad de área, de una varilla cargada en dirección axial, como se aprecia en la Figura 2.1. Si la sección seleccionada es normal al eje de la varilla, la fuerza transmitida, \mathbf{F} , es normal al área considerada, \mathbf{A} , y por lo tanto, solo existe un esfuerzo normal en esa sección, $\sigma = \mathbf{F}/\mathbf{A}$.

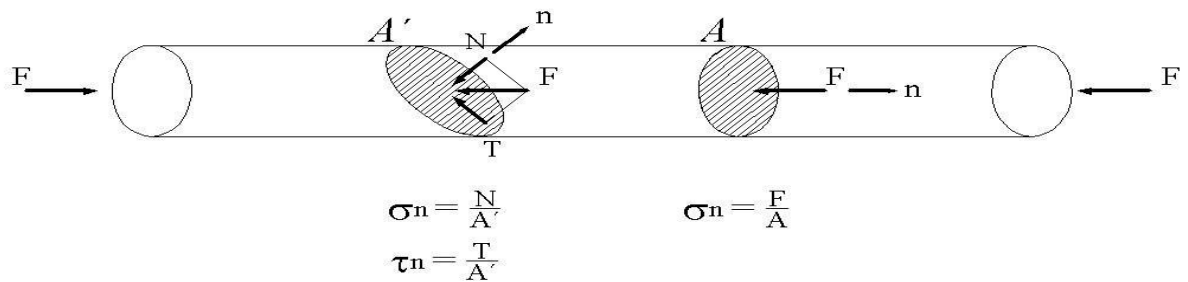


Figura 2.1. Varilla cargada en la dirección axial.

Sin embargo, si se selecciona una sección que forman un ángulo diferente de 90° con el eje de la varilla, la fuerza transmitida tiene una componente normal a la sección, \mathbf{N} , y una componente de corte, \mathbf{T} , y por lo tanto, existe un esfuerzo normal, $\sigma_n = N/A'$, y un esfuerzo de corte, $\tau_n = T/A'$, donde A' es el área de la sección oblicua.

2.2.2 En mecánica de suelos

Las definiciones anteriores son adecuadas cuando se trata con elementos estructurales cargados en la dirección axial. Sin embargo, cuando se tiene un cuerpo tridimensional, como es una masa de suelo, que puede cargarse con fuerzas externas colocadas en diferentes puntos y con diversas direcciones y magnitudes (Figura 2.2), las cuales se denominan fuerzas de superficie, y que además soporta fuerzas internas o de cuerpo, tales como el peso del material, las fuerzas que produce un sismo, y las fuerzas de infiltración el agua, se necesita una definición de esfuerzo más general.

Para llegar a dicha definición, se selecciona un punto \mathbf{i} dentro del cuerpo, y allí se considera un área elemental, $d\mathbf{A}$, que tiene una normal \mathbf{n} , con

dirección cualquiera en el espacio.

Si se llama $d\mathbf{F}$, a la fuerza que se transmite a través del área elemental, el esfuerzo resultante en el punto dado, para la orientación considerada del área $d\mathbf{A}$, es el vector $\rho_n = d\mathbf{F}/dA$. En la notación del esfuerzo el subíndice indica la orientación del área elemental, es decir, ρ_n es el esfuerzo resultante en un plano cuya normal es \mathbf{n} .

El esfuerzo ρ_n casi siempre no es perpendicular al área sobre la cual actúa. Su magnitud y dirección está definida por dos componentes: el esfuerzo normal, σ_n , y el esfuerzo de corte, τ_n , como se muestra en la Figura 2.2. Este último a su vez se puede expresar como dos componentes paralelas a los ejes de coordenadas del plano de $d\mathbf{A}$, es decir, τ_{nx} , y, τ_{ny} .

2.2.3 Unidades y signos

Los esfuerzos se expresan en kN/m^2 , kgf/cm^2 , lb/in^2 , o, kPa . La equivalencia entre estas cuatro unidades es la siguiente:

$$1 \text{ kgf/cm}^2 = 14.2 \text{ psi} = 98.1 \text{ kN/m}^2 = 98.1 \text{ kPa}$$

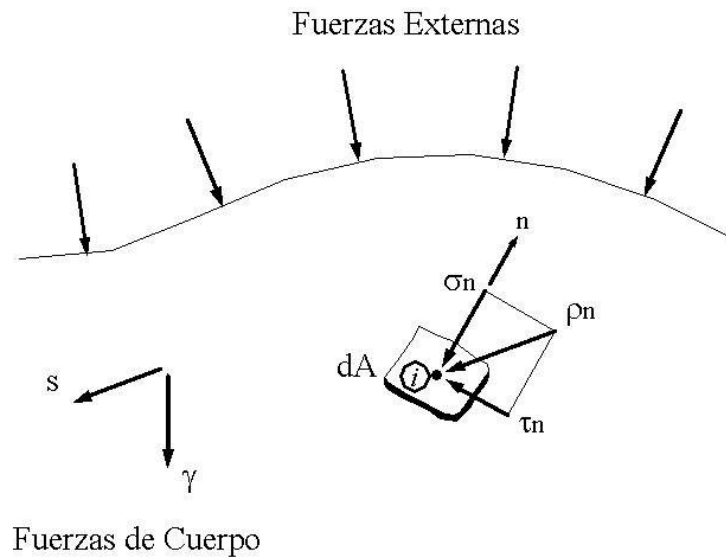


Figura 2.2. Esfuerzos en el punto i de la masa de suelo

Como la mayoría de los esfuerzos normales en las masas de suelos son de compresión, se considera que los esfuerzos normales son positivos si comprimen el área sobre la cual actúan. Esta convención es opuesta a la que se usa en la mecánica de sólidos. Los esfuerzos de corte son positivos

2. ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN UN MEDIO CONTINUO

cuando actúan en la dirección contraria a las agujas del reloj.

2.3 Estado de esfuerzos en un punto

2.3.1 Esfuerzos y planos principales

Cuando en el mismo punto dentro de la masa de suelo, \mathbf{i} , se cambia la orientación del área elemental $d\mathbf{A}$, el esfuerzo resultante ρ_n también cambia, tanto en magnitud como en dirección.

Casi siempre ρ_n tiene una componente de corte, τ_n , pero, se puede demostrar que bajo cualesquiera condiciones posibles, en todo punto de la masa de suelo existen tres direcciones mutuamente perpendiculares, llamados ejes de esfuerzos principales, en cuyos planos desaparecen las componentes de los esfuerzos de corte. Los esfuerzos normales correspondientes a estas tres direcciones se llaman **esfuerzos principales**, y los tres planos mutuamente perpendiculares sobre los cuales ellos actúan, se llaman **planos principales**.

Puesto que los tres esfuerzos principales son esfuerzos normales, se denotan en orden algebraico de magnitud como σ_1 , σ_2 , σ_3 , y se llaman respectivamente, esfuerzo principal mayor, intermedio, y, menor. En la Figura 2.3 se muestra la posición de los tres esfuerzos en el elemento cúbico infinitesimal del punto \mathbf{i} .

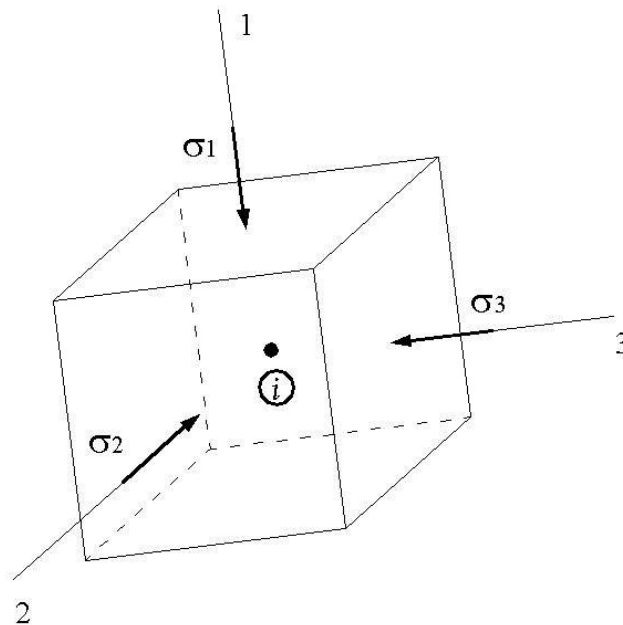


Figura 2.3. Esfuerzos principales en el punto \mathbf{i} .

2.3.2 Estado de esfuerzos

El estado de esfuerzos en un punto está totalmente definido si se conoce la magnitud de los esfuerzos principales y la dirección de los planos principales en el espacio, con respecto a un sistema arbitrario de coordenadas **xyz**. Se requiere entonces conocer 6 cantidades escalares (3 esfuerzos y 3 cosenos direccionales).

Puesto que tanto la dirección como la magnitud de los esfuerzos principales varía de un punto a otro de la masa de suelo, desde el punto de vista matemático es más fácil trabajar con las componentes de los esfuerzos que que actúan sobre planos paralelos a los planos de coordenadas **xyz**.

De esta manera, en cualquier punto de la masa de suelo el estado de esfuerzos se puede definir por tres esfuerzos, ρ_x , ρ_y , ρ_z , o por sus 9 componentes, σ_x , τ_{xy} , τ_{xz} , σ_y , τ_{yx} , τ_{yz} , σ_z , τ_{zx} , τ_{zy} , como se muestra en la Figura 2.4. La primera letra de la notación de doble subíndice en el esfuerzo de corte indica la dirección de la normal al plano sobre el cual actúa el esfuerzo, y la segunda letra, la dirección de la componente del esfuerzo.

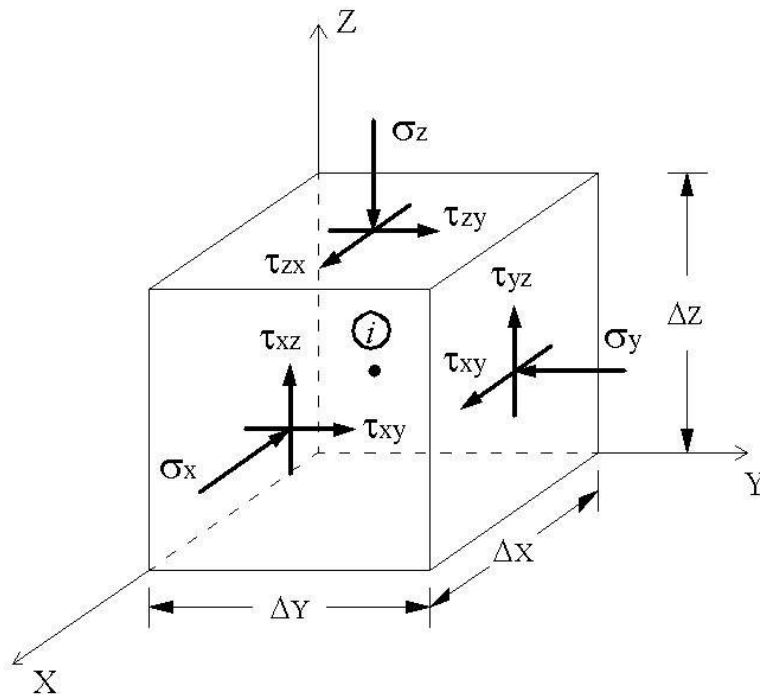


Figura 2.4. Componentes de esfuerzos en el punto **i**.

Ya que el equilibrio estático requiere $\tau_{xy} = +\tau_{yx}$, $\tau_{yz} = +\tau_{zy}$, $\tau_{zx} = +\tau_{xz}$, el estado de esfuerzos se define solo con 6 cantidades escalares.

2. ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN UN MEDIO CONTINUO

2.3.3 Componentes del esfuerzo resultante en un plano que pasa por el punto i

Si sobre un plano cualquiera que pasa por el punto **i**, cuya normal es **n**, actúa un esfuerzo resultante ρ_n , (Figura 2.5), las componentes de dicho esfuerzo en las direcciones de los ejes x, y, z , son, $\rho_{nx}, \rho_{ny}, \rho_{nz}$.

En términos de las componentes de esfuerzos que actúan sobre los planos cuyas normales son x, y, z , estos esfuerzos se expresan en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \rho_{nx} \\ \rho_{ny} \\ \rho_{nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \cos \alpha_{nx} \\ \cos \alpha_{ny} \\ \cos \alpha_{nz} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Donde,

$\alpha_{nx} = l_1 =$ ángulo entre los ejes **n** y **x**,

$\alpha_{ny} = l_2 =$ ángulo entre los ejes **n** y **y**,

$\alpha_{nz} = l_3 =$ ángulo entre los ejes **n** y **z**.

Los cosenos de los ángulos entre los ejes se llaman **cosenos direccionales**. En la Figura 2.6 se muestra su denominación, de acuerdo con la posición de los ejes que se define en la Figura 2.5.

Si el punto **i** se encuentra a una distancia r del origen **o**, y tiene coordenadas x, y, z , éstas se pueden escribir,

$$x = r * l_1; y = r * l_2; z = r * l_3$$

Puesto que r es la coordenada polar de **P**,

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

que se puede escribir,

$$1 = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2}$$

que es igual a, $1 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2$

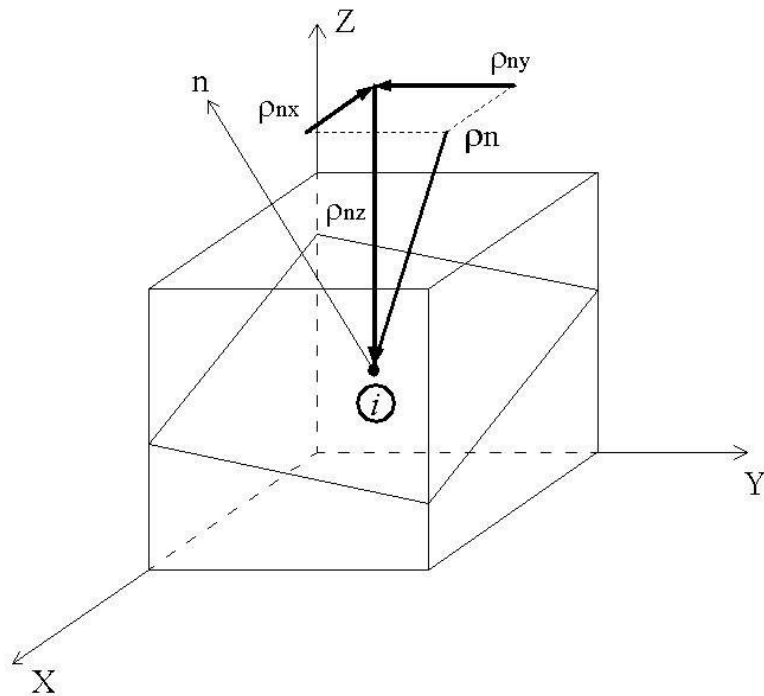


Figura 2.5. Componentes del esfuerzo resultante en el punto **i**.

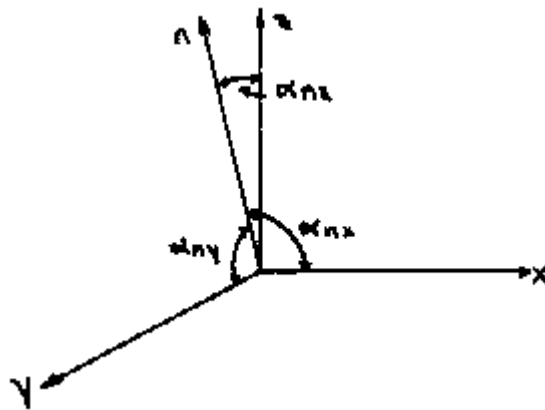


Figura 2.6. Cosenos direccionales en el punto **i**.

La matriz de esfuerzos, $[S]_{xyz}$, es la matriz de las componentes de esfuerzos que actúan en los planos cuyas normales son x , y , z , en el cubo infinitesimal del punto **i**.

$$S[xyz] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

2. ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN UN MEDIO CONTINUO

En un sistema de coordenadas cilíndrico la matriz de las componentes de esfuerzos que actúan en los planos cuyas normales son r, θ, z , es la siguiente:

$$S[r\theta z] = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Ejemplo:

El estado de esfuerzos en un punto está definido por los siguientes valores:
 $\sigma_x = -800$ kPa; $\sigma_y = 1200$ kPa; $\sigma_z = -400$ kPa; $\tau_{xy} = 400$ kPa; $\tau_{yz} = -600$ kPa; $\tau_{zx} = 500$ kPa.

Determinar:

a) Las componentes en las direcciones x, y, z del esfuerzo ρ_n , que actúa sobre un plano cuya normal es \mathbf{n} , que tiene los siguientes cosenos direccionales:

$$\cos \alpha_{nx} = 1/4; \cos \alpha_{ny} = 1/2.$$

b) Los esfuerzos normales y de corte que actúan sobre el plano \mathbf{n} .

Solución:

a) Puesto que,

$$\cos^2 \alpha_{nx} + \cos^2 \alpha_{ny} + \cos^2 \alpha_{nz} = 1,$$

$$\text{entonces, } \cos \alpha_{nz} = (11)^{1/2}/4$$

La matriz de los esfuerzos componentes de ρ_n se escribe como,

$$\begin{bmatrix} \rho_{nx} \\ \rho_{ny} \\ \rho_{nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -800 & 400 & 500 \\ 400 & 1200 & -600 \\ 500 & -600 & -400 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ \sqrt{11}/4 \end{bmatrix}$$

b) El esfuerzo normal, σ_n , que actúa sobre el plano cuya normal es \mathbf{n} , está dado por,

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \rho_{nx} * \cos \alpha_{nx} + \rho_{ny} * \cos \alpha_{ny} + \rho_{nz} * \cos \alpha_{nz} \\ &= (414,6) * (1/4) + (202,6) * (1/2) + (-506,7) * ((11)^{1/2}/4) = \\ &= -214,73 \text{ kPa} \end{aligned}$$

Además, se sabe que,

$$\rho^2_n = \rho^2_{nx} + \rho^2_{ny} + \rho^2_{nz} =$$

$$= (414,6)^2 + (202,6)^2 + (-506,7)^2 = 471.306,7$$

y que,

$$\rho_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2$$

$$\tau_n^2 = \rho_n^2 - \sigma_n^2 = 471.306,7 - (-214,73)^2 = 425.197,73$$

$$\tau_n = 652,07 \text{ kPa}$$

2.3.4 Esfuerzos en un sistema de ejes x',y',z'

Cuando se tiene un sistema de ejes de coordenadas x', y', z', de ejes mutuamente ortogonales, cuyo origen coincide con el punto considerado, y si los cosenos direccionales son,

	x	y	z
x'	l ₁	l ₂	l ₃
y'	m ₁	m ₂	m ₃
z'	n ₁	n ₂	n ₃

Se puede demostrar que,

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$$

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

Los esfuerzos que actúan sobre los planos cuyas normales son x', y', z' se pueden expresar en función de los componentes de esfuerzos que actúan sobre los planos x, y, z, mediante la relación:

$$[S]_{x'y'z'} = [A] * [S]_{xyz} * [A]^T \quad (2.4)$$

donde,

[A] = matriz de los cosenos direccionales, expresada como,

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{x'x} & \cos \alpha_{x'y} & \cos \alpha_{x'z} \\ \cos \alpha_{y'x} & \cos \alpha_{y'y} & \cos \alpha_{y'z} \\ \cos \alpha_{z'x} & \cos \alpha_{z'y} & \cos \alpha_{z'z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}$$

[A]^T = matriz transformada de [A]

2.4 Ecuaciones de equilibrio

Dentro de un medio continuo, tal como es una masa de suelo, las intensidades de los esfuerzos varían de un punto a otro, por efecto de las cargas de superficie y de cuerpo, y es necesario establecer las condiciones que controlan la variación.

2. ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN UN MEDIO CONTINUO

Si se supone un elemento infinitesimal de dimensiones Δx , Δy , Δz que se halla en equilibrio, en una cara cuya normal es x actúa un esfuerzo σ_x , mientras que en la cara opuesta actúa el esfuerzo $\sigma'_x = \sigma_x + \Delta\sigma_x$, de signo y dirección contrarios, en donde,

$$\sigma'_x = \sigma_x + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) dx$$

y, $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$, es la variación de la intensidad del esfuerzo por unidad de x .

De manera similar se pueden definir los otros esfuerzos normales y de corte, para tener los siguientes nueve componentes de esfuerzos de las caras opuestas:

$$\begin{aligned} &\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx; \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx; \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx \\ &\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy; \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy; \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \\ &\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz; \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz; \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \end{aligned}$$

Las fuerzas de cuerpo se denominan X , Y , Z , que actúan en las respectivas direcciones. Puesto que el elemento se halla en equilibrio se puede hacer, a) suma de fuerzas en cada dirección = 0; b) suma de momentos de las fuerzas alrededor de los tres ejes de referencia = 0. Es decir,

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0; \sum F_y = 0; \sum F_z = 0 \\ \sum M_x &= 0; \sum M_y = 0; \sum M_z = 0 \end{aligned}$$

Si se hace suma de fuerzas en la dirección de x se tiene,

$$\begin{aligned} \sum F_x &= \left[\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right] * dy * dz - \sigma_x * dy * dz + \left[\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right] * dx * dz - \tau_{yx} * dx * dz \\ &+ \left[\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right] * dx * dy - \tau_{zx} * dx * dy + X * dx * dy * dz = 0 \end{aligned}$$

Simplificando se llega a,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

y de manera similar para los ejes y , y , z ,

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

Ahora consideramos los momentos de las fuerzas; por ejemplo, $\Sigma M_z = 0$:

$$\Sigma M_z = \left[\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right] * dx * dz * \frac{dy}{2} + \tau_{yx} * dx * dz * \frac{dy}{2} - \left[\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right] * dy * dz * \frac{dx}{2} - \tau_{xy} * dy * dz * \frac{dx}{2} = 0$$

Si se desprecian los términos de cuarto orden y se simplifica, se llega a que,

$$T_{yx} = T_{xy}$$

De manera similar, con la suma de momentos alrededor de los otros ejes, $\Sigma M_y = 0$, $\Sigma M_x = 0$, se obtiene,

$$T_{yz} = T_{zy} ; T_{xz} = T_{zx} \quad (2.6)$$

Lo anterior implica, que para evitar la rotación de un cuerpo y mantenerlo en equilibrio, se requiere que el efecto de los esfuerzos de corte que actúan sobre un plano sea contrarrestado por el efecto de los esfuerzos de corte sobre el plano opuesto.

Como consecuencia, para definir el estado de esfuerzos en un punto se requieren solo seis componentes independientes de esfuerzos; por lo tanto, puesto que se tienen tres ecuaciones de equilibrio para relacionar con seis componentes de esfuerzos, el sistema es estáticamente indeterminado. Para resolverlo se deben conocer las deformaciones y la relación esfuerzo – deformación del material.

Las ecuaciones diferenciales de equilibrio correspondientes al sistema cilíndrico de coordenadas son las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + P_r &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + P_\theta &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}}{r} + P_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

en donde, P_r , P_θ , P_z , son las fuerzas de corte que actúan en las direcciones r , θ , y z .

2. ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN UN MEDIO CONTINUO

2.4 Esfuerzos efectivos y neutros

2.4.1 Esfuerzos efectivos

En la mecánica de materiales de varias fases, tales como los suelos, no sólo se necesita conocer la magnitud y dirección del esfuerzo total resultante, ρ_n , que se transmite sobre el área elemental considerada, sino también, aquella porción del esfuerzo, ρ'_n , que se transmite a través del esqueleto de suelo.

El esfuerzo ρ' se denomina esfuerzo efectivo (o intergranular), y de su magnitud y variación, dependen los cambios de volumen y la resistencia al corte del suelo.

2.4.2 Presión de poros

La componente restante del esfuerzo ρ se designa como u , y se llama, presión neutra, o de poros. En los suelos saturados la presión de poros se define por la cabeza de presión en el punto considerado, y se mide con instrumentos apropiados, llamados piezómetros, o transductores de presión de poros. Si no existe flujo, o movimiento del agua a través de los poros del suelo, la presión de poros es igual a la presión hidrostática que existe en el punto considerado.

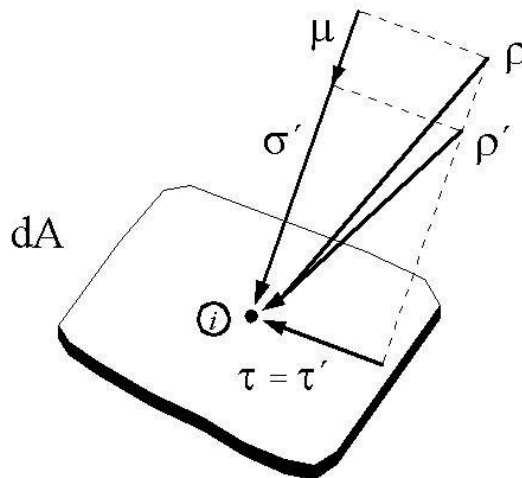


Figura 2.7. Esfuerzo efectivo.

Los esfuerzos efectivos no se pueden medir directamente, y se deducen a partir de los esfuerzos totales y las presiones de poros.

Puesto que los fluidos no transmiten esfuerzos de corte, el esfuerzo neutro, u , siempre es normal al área sobre la cual actúa. Por lo tanto, el esfuerzo normal efectivo, σ' , siempre se encuentra como la diferencia entre el esfuerzo normal total, σ , y la presión de poros, u (Figura 2.7).

En forma analítica esto se puede expresar como:

$$\begin{aligned}\sigma' &= \sigma - u \\ \tau' &= \tau\end{aligned}\tag{2.8}$$

La primera de las expresiones anteriores establece que el esfuerzo efectivo es igual a la diferencia entre los esfuerzos totales y la presión de poros, y se conoce como el principio de esfuerzos efectivos.

La formulación de este principio fue realizada por **Karl Terzaghi** en 1925, y ella determinó el nacimiento de la Mecánica de Suelos moderna. Por primera vez permitió encontrar una explicación racional a la duración excesivamente larga de los asentamientos que presentan algunas estructuras, y a la variación de la resistencia al corte con el tiempo y con la velocidad de aplicación de las cargas.

Bishop (1959) extendió el principio de Terzaghi a suelos no saturados, con la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\sigma' &= \sigma - u_a + \chi^*(u_a - u_w) \\ \sigma' &= \sigma - S_x * u_w\end{aligned}\tag{2.9}$$

donde,

u_a = presión del aire,
 $u_a - u_w$ = succión,
 X = parámetro de Bishop $\approx S$, para suelos,
 S_x = $1 + (1 - X) * (u_a - u_w) / u_w$.

Para un suelo seco, $X = 0$, $\sigma' = \sigma - u_a$;
 para un suelo saturado, $X = 1$, $\sigma' = \sigma - u_w$

Skempton (1960) aplicó el concepto del esfuerzo efectivo a los materiales térricos rígidos y porosos, como las rocas, y llegó a las siguientes expresiones:

2. ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN UN MEDIO CONTINUO

a) Para resistencia al corte,

$$\sigma' = \sigma - [1 - (a * \frac{\tan \psi}{\tan \phi'})] * S_x * u_w \quad (2.10)$$

b) Para compresibilidad,

$$\sigma' = \sigma - [1 - (\frac{C_s}{C})] * S_x * u_w \quad (2.11)$$

donde,

a = relación del área de contacto entre sólidos (A_s) y el área total (A),

ψ = ángulo de fricción intrínseca del mineral sólido,

ϕ' = ángulo efectivo de fricción del material poroso,

C_s = compresibilidad volumétrica de las partículas sólidas,

C = compresibilidad volumétrica del material poroso.

Skempton encontró además que,

a) En materiales porosos no estructurados la ecuación (2) es totalmente válida.

b) Para rocas y hormigón:

$$0.1 < \tan \psi / \tan \phi' < 0.3;$$

$$0.1 < a < 0.5;$$

$$0.1 < C_s / C < 0.5$$

Por lo tanto, las presiones de poros en los materiales rocosos son menores que en los suelos, y el esfuerzo efectivo se expresa como,

$$\sigma' = \sigma - [0.9 a 0.5] * S_x * u_w \quad (2.12)$$

Hoek y Brown (1980) propusieron la siguiente expresión para los materiales rocosos saturados,

$$\sigma' = \sigma - [1 - n_b] * u_w \quad (2.13)$$

donde,

n_b = porosidad límite

Como aproximación se puede asumir que $n_b = n_f$ = porosidad de fisuras. Y por lo tanto, para una masa rocosa no saturada el esfuerzo efectivo es,

$$\sigma' = \sigma - [1 - n_f] * S_x * u_w \quad (2.14)$$

2.5 Invariantes de esfuerzos

Con el estado de esfuerzos en un punto y la ecuación 2.4 se puede obtener un conjunto de cosenos direccionales con los cuales se reducen todos los esfuerzos de corte a cero y se alcanzan valores límites de los esfuerzos normales, que se denominan esfuerzos principales, cuyo estado se expresa de la siguiente manera:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Si se supone un plano principal cuyo esfuerzo normal es σ , se puede escribir,

$$\sigma_{nx} = \sigma * l_1; \sigma_{ny} = \sigma * l_2; \sigma_{nz} = \sigma * l_3$$

que se puede escribir,

$$\sigma_{nx} - \sigma * l_1 = 0; \sigma_{ny} - \sigma * l_2 = 0; \sigma_{nz} - \sigma * l_3 = 0$$

y puesto que,

$$\{\sigma_n\} = [S]\{l\}$$

Es decir,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{nx} \\ \sigma_{ny} \\ \sigma_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) * l_1 + \tau_{yx} * l_2 + \tau_{zx} * l_3 &= 0 \\ \tau_{xy} * l_1 + (\sigma_y - \sigma) * l_2 + \tau_{zy} * l_3 &= 0 \\ \tau_{xz} * l_1 + \tau_{yz} * l_2 + (\sigma_z - \sigma) * l_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Con el propósito de obtener una solución no trivial a las ecuaciones 2.15, el determinante de los cosenos direccionales debe ser cero, es decir,

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.16)$$

Si se expande el determinante, se encuentra,

$$\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) * \sigma^2 + (\sigma_x * \sigma_y + \sigma_y * \sigma_z + \sigma_z * \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) * \sigma - (\sigma_x * \sigma_y * \sigma_z) - \sigma_x * \tau_{yz}^2 - \sigma_y * \tau_{zx}^2 - \sigma_z * \tau_{xy}^2 + 2 * (\tau_{xy} * \tau_{yz} * \tau_{zx}) = 0 \quad (2.17)$$

o también,

$$\sigma^3 - I_1 * \sigma^2 + I_2 * \sigma - I_3 = 0 \quad (2.18)$$

2. ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN UN MEDIO CONTINUO

donde,

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + 2(\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx})$$

Estos valores se llaman los invariantes de esfuerzos; el primero se denomina el invariante de primer orden o lineal, I_2 el de segundo orden o cuadrático, e I_3 es el invariante de tercer orden o cúbico.

Las raíces de la ecuación 2.18 son reales y corresponden a los esfuerzos principales; el número algebraicamente mayor es el esfuerzo principal mayor, σ_1 , mientras que el número algebraicamente menor es σ_3 .

2.6 Deformaciones en un punto

Si en un estado plano de deformaciones infinitesimales como el de la Figura 2.8 se tiene,

S_x = desplazamiento en la dirección x
 S_z = desplazamiento en la dirección z,

Las deformaciones unitarias correspondientes se definen con las expresiones (2.8),

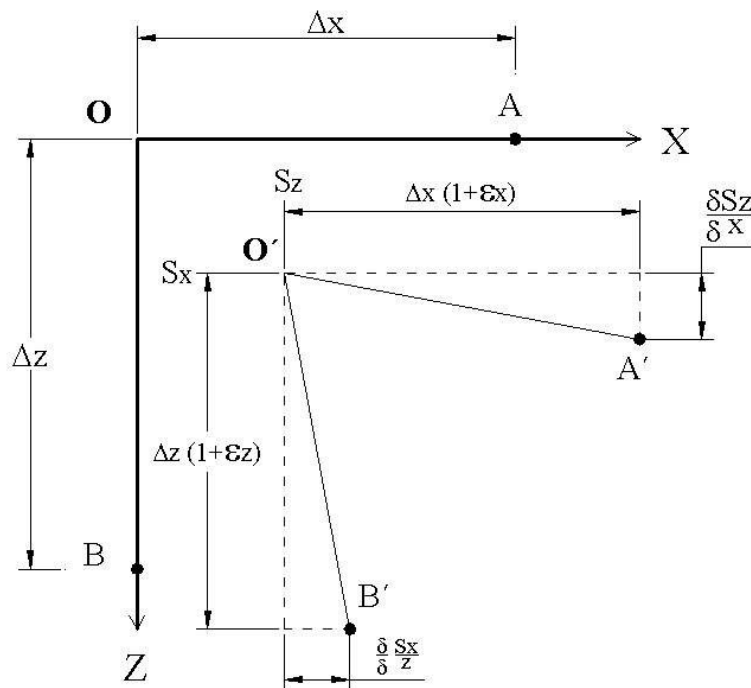


Figura 2.8. Estado de deformaciones en un plano.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial S_x}{\partial x} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial S_z}{\partial z}\end{aligned}\tag{2.8}$$

γ_{xz} = deformación de corte, que se expresa como (2.9),

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial S_x}{\partial z} + \frac{\partial S_z}{\partial x}\tag{2.9}$$

Una deformación de corte es positiva cuando el ángulo se convierte en un ángulo menor de 90°.

2.5.1 Transformación de deformaciones

De manera análoga a los esfuerzos, cuando se desea conocer las deformaciones que se producen en un sistema de coordenadas x', y', z' , se utiliza la ecuación (2.10).

$$[D]_{x'y'z'} = [A] * [D]_{xyz} * [A]^T\tag{2.10}$$

donde,

$[D]_{x'y'z'}$ = matriz de deformación en el sistema x', y', z' ,

$[A]$ = matriz de los cosenos direccionales,

$$[D]_{xyz} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

con, $\varepsilon_{ij} = 1/2\gamma_{ij}$

2.6 **Ecuaciones de compatibilidad de las deformaciones**

Cuando las deformaciones en un medio continuo son pequeñas, se pueden relacionar las seis componentes de la deformación con los desplazamientos en la dirección de los ejes de coordenadas, S_x, S_y, S_z , mediante las expresiones (2.11).

2. ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN UN MEDIO CONTINUO

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial S_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial S_y}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial S_z}{\partial z} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial S_x}{\partial y} + \frac{\partial S_y}{\partial x} \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial S_y}{\partial z} + \frac{\partial S_z}{\partial y} \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial S_z}{\partial x} + \frac{\partial S_x}{\partial z}
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

De igual manera que los esfuerzos de corte,

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$$

Para que las deformaciones en el medio sean continuas, es decir, para que no haya rotura, se deben satisfacer las ecuaciones (2.12), llamadas ecuaciones de compatibilidad de deformaciones.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

2.7 Esfuerzos y deformaciones octaédricos

Una forma conveniente de representar el estado de esfuerzos de un elemento consiste en usar los esfuerzos principales como ejes de coordenadas. De esta manera, cualquier estado de esfuerzos se puede representar en el espacio de los esfuerzos por medio de un punto de coordenadas $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, o por un vector.

Cuando todos los esfuerzos principales son iguales, es decir $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, la condición de esfuerzos se llama isotrópica. Según sea el signo de los esfuerzos, un estado isotrópico de esfuerzos puede ser de compresión isotrópica, o de tensión isotrópica. En ambas situaciones los esfuerzos normales que actúan sobre todos los planos que pasan por el punto son los mismos, y no existen esfuerzos de corte sobre ellos. Otros nombres para este estado de esfuerzos son "esférico", debido a que el elipsoide de esfuerzos se vuelve una esfera, o "hidrostático", ya que se presenta en cualquier punto dentro del agua estática. En un espacio de esfuerzos el estado de esfuerzos hidrostático se representa por una línea recta en la que

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, que se llama línea isotrópica o hidrostática.

El esfuerzo promedio de los tres esfuerzos principales se llama esfuerzo normal promedio, o esfuerzo normal octaédrico, σ_0 :

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}I_1$$

Se llama plano octaédrico al que contiene todos los puntos con el mismo valor del esfuerzo normal promedio, dado por $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_0$. Todos los planos octaédricos son normales a la línea isotrópica.

La condición de esfuerzos para la cual el esfuerzo normal promedio desaparece se llama desviadora, y el estado de esfuerzos correspondiente se representa por un plano octaédrico que pasa por el origen, llamado plano desviador. Su ecuación es $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$.

Se puede considerar que cualquier estado de esfuerzos se compone de dos partes: un componente isotrópico (esférico), definido por el esfuerzo normal promedio, σ_0 , y un componente desviador. El estado de esfuerzos correspondiente a un punto N ubicado fuera de la línea isotrópica, se puede considerar como la suma de un esfuerzo ON', sobre la línea isotrópica, y el esfuerzo ON'', en el plano desviador.

El vector ON'' = N'N es un vector proporcional al esfuerzo octaédrico, definido como,

$$\tau_0 = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{2(I_1^2 - 3I_2)}$$

Se puede demostrar que para cualquier estado de esfuerzos el corte octaédrico varía entre 0.816 y 0.943 del esfuerzo cortante máximo, que siempre es igual a $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$.

La discusión anterior sobre los componentes del esfuerzo octaédrico por analogía se puede aplicar a la deformación. De esta manera se puede definir el valor promedio de las tres deformaciones principales como la deformación octaédrica lineal,

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \frac{1}{3}\varepsilon_v$$

y la deformación octaédrica de corte como,

$$\gamma_0 = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}$$

La deformación lineal octaédrica es una medida del cambio de volumen del elemento, mientras que la deformación octaédrica de corte se puede considerar como una medida del cambio de forma del elemento considerado.

2. ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN UN MEDIO CONTINUO

Santa Fe de Bogotá, Agosto 10 de 1998

LISANDRO BELTRAN MORENO

Profesor Asociado U.N.