

3. RELACIONES ESFUERZO - DEFORMACIÓN

3.1 Ecuaciones de equilibrio en dos dimensiones

Muchos problemas de geotecnia se pueden analizar en dos dimensiones; en este caso se tiene un estado plano de esfuerzos, en el que no existen los esfuerzos en la dirección de Y. Los esfuerzos normales y de corte que actúan sobre un elemento infinitesimal típico se muestran en la Figura 3.1.

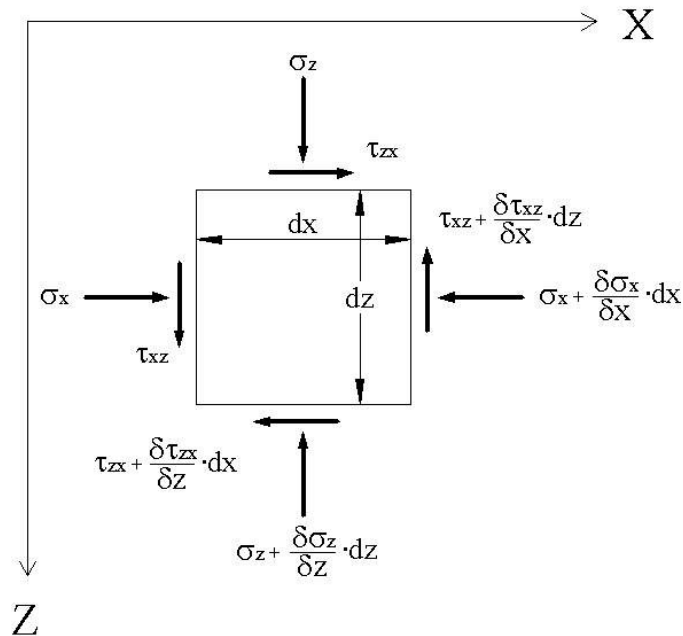


Figura 3.1. Estado de esfuerzos en el plano xz.

Los esfuerzos cambian a través del elemento, y la rata de cambio de los esfuerzos normales y de corte son las siguientes:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}, \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}, \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}, \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

Puesto que la masa de suelo se halla en equilibrio estático, cada elemento de la masa debe satisfacer las condiciones de equilibrio. Si se toman momentos alrededor del centro del elemento y se desprecian los diferenciales de segundo orden, se encuentra que,

3. RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACIÓN

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

Cuando se hace suma de fuerzas en las direcciones de x y z iguales a cero, se encuentran las siguientes expresiones,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - X = 0 \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - Z = 0 \quad (3.1b)$$

en las que X y Z son las respectivas fuerzas de masa o de cuerpo por unidad de volumen. Estas son las ecuaciones de equilibrio en el plano x, z. En términos de los esfuerzos totales, las fuerzas de cuerpo son, $X = 0$, $Z = \gamma_t$ (o, γ_{sat}). En esfuerzos efectivos, las fuerzas de cuerpo son, $X' = 0$, $Z' = \gamma'$. Cuando se tienen fuerzas de infiltración, $X' = i_x * \gamma_w$, $Z' = i_z * \gamma_w + \gamma'$, donde, i_x e i_z son los gradientes hidráulicos en las direcciones x, z, respectivamente.

Así por ejemplo, cuando se tiene un medio semi-infinito limitado por una superficie horizontal, compuesto por un material homogéneo, con un peso unitario, γ_t , como fuerza de cuerpo, y una fuerza de superficie que es una carga por unidad de área q, colocada en un área de extensión infinita, con una inclinación α , como se indica en la Figura 3.2, las ecuaciones de equilibrio son,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad (3.2a)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \gamma_t = 0 \quad (3.2b)$$

Como la carga de superficie tiene una extensión infinita, los esfuerzos de corte son iguales en toda la masa considerada y por tanto,

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0$$

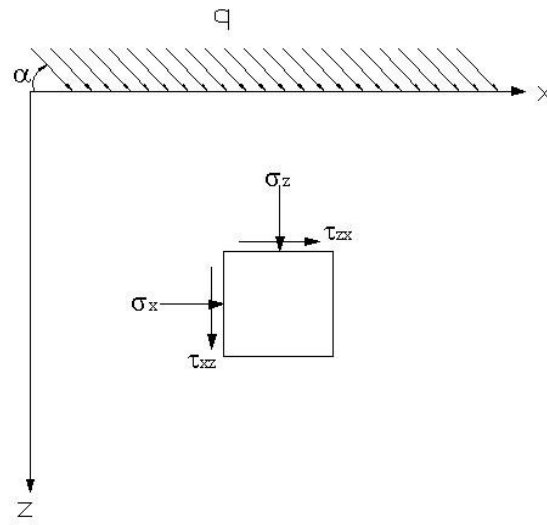


Figura 3.2. Estado plano de esfuerzos con carga de extensión infinita en la superficie.

Entonces las ecuaciones 3.2 se reducen a,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0 \quad (3.3a)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \gamma_t = 0 \quad (3.3b)$$

Si se integra la Ecuación 3.3a se llega a, $\sigma_x = C_1$; con 3.3b se encuentra, $\sigma_z = \gamma_t * z + C_2$. Cuando $z = 0$, $\sigma_z = C_2 = q * \text{Sen } \alpha$. Por lo tanto,

$$\sigma_z = \gamma_t * z + q * \text{Sen } \alpha$$

Para $z = 0$, $\sigma_x = C_1 = q * \text{Cos } \alpha$. Para $z > 0$, σ_x se estima como una función de $\sigma_z + C_1$.

3.2 Ecuaciones de compatibilidad en dos dimensiones

Debido a la aplicación de fuerzas o cargas sobre el terreno, los puntos dentro de la masa de suelo se desplazan con relación a los ejes de coordenadas y entre sí. Las componentes de desplazamiento en las

3. RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACIÓN

direcciones x , y , z se designan por S_x y S_z respectivamente, y las deformaciones normales están dadas por,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial S_x}{\partial x}, \varepsilon_z = \frac{\partial S_z}{\partial z}$$

y la deformación de corte por:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial S_x}{\partial z} + \frac{\partial S_z}{\partial x}$$

Estas deformaciones no son independientes, ya que tienen que ser compatibles entre sí para que la masa de suelo como un todo se mantenga continua. Esta condición conduce a la siguiente ecuación, que se conoce como de compatibilidad en dos dimensiones:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = 0 \quad (3.4)$$

Las ecuaciones 3.1 y 3.4 son independientes de las propiedades de los materiales y se pueden aplicar a cualquier relación esfuerzo-deformación, ya sea elástica o plástica.

3.3 Relaciones esfuerzo – deformación

La solución rigurosa de un problema particular requiere que tanto las ecuaciones de equilibrio como de compatibilidad se satisfagan para unas condiciones de borde dadas. Sin embargo, también se requiere una relación apropiada esfuerzo– deformación del material. En la teoría de la elasticidad se utiliza una relación esfuerzo – deformación lineal para combinarla con las ecuaciones 3.1 y 3.4. El problema de obtener la distribución de esfuerzos y deformaciones para satisfacer estas ecuaciones se conoce como de valor límite.

En la Figura 3.3 se presenta una relación típica esfuerzo – deformación de un suelo. La relación es no lineal, y por lo tanto, las deformaciones tienen componentes elásticas (recuperables) y plásticas (no recuperables). Entre los puntos **O** y **Y** la relación es aproximadamente lineal para la mayoría de los suelos, y luego del punto **Y** se inicia una deformación plástica, es decir, en el punto **Y** se inicia la fluencia del suelo. El pico de la resistencia se alcanza en **F**. Entre los puntos de fluencia y resistencia pico (**Y** y **F**) ocurre deformación plástica acompañada por el incremento en el esfuerzo resistente, pero progresivamente se requieren incrementos de esfuerzos más pequeños para producir un incremento en

la deformación plástica. Este comportamiento se conoce como deformación de endurecimiento (o trabajo), el cual ocurre solo si se produce deformación plástica.

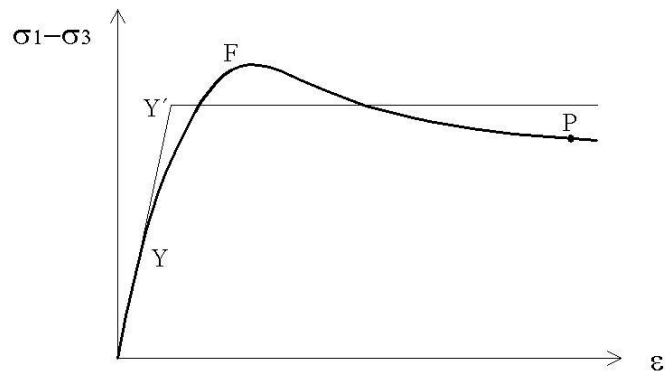


Figura 3.3. Relación típica esfuerzo – deformación de un suelo.

En algunos casos la resistencia al corte presenta una disminución después del pico de resistencia; esta característica se llama deformación (o trabajo) de ablandamiento.

En el análisis se puede hacer la simplificación de suponer que el suelo se comporta como un material elástico–perfectamente plástico, con un relación que se representa por las líneas OY'P. En la Figura 3.4 se presentan otras relaciones típicas esfuerzo – deformación.

3.4 Problemas de deformación

La respuesta de un suelo bajo carga en la mayoría de los casos es una función compleja de varias variables, entre las que se encuentran:

- i) El nivel de los esfuerzos (la magnitud de los esfuerzos iniciales),
- ii) La velocidad de aplicación de la carga,
- iii) Las condiciones del drenaje (dependen del tipo de suelo),
- iv) La frecuencia de la carga.

Por lo tanto, se puede tener un número infinito de relaciones esfuerzo-deformación en un mismo suelo, de acuerdo con la combinación de las variables anteriores. Como consecuencia de las dificultades que se encuentran para formular la respuesta básica del suelo bajo la carga,

3. RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACIÓN

desde los inicios de la mecánica de suelos se decidió considerar el comportamiento de los suelos sometidos a niveles bajos de esfuerzos, que casi siempre son los de las condiciones de trabajo, separada de su comportamiento último o de falla.

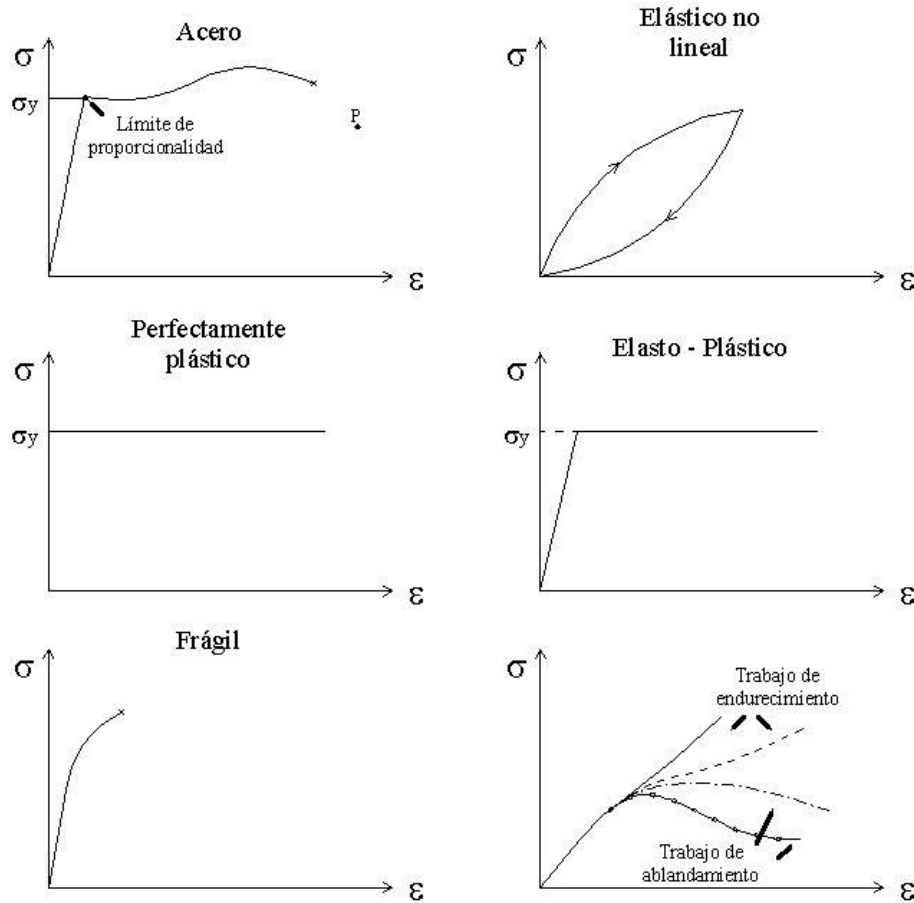


Figura 3.4. Relaciones típicas esfuerzo – deformación.

De esta manera se utiliza un comportamiento idealizado del suelo sometido a niveles bajos de esfuerzos, bajo las cargas de trabajo, en donde el problema principal casi siempre consiste en la determinación de la deformación del suelo en función del tiempo. Esta clase de problemas de la mecánica de suelos, que se llaman problemas de deformación, incluye casos tales como el asentamiento de fundaciones, la deflexión de pavimentos, la deformación de pilotes en grupo, la vibración de cimientos, o la propagación de ondas a través de la masa de suelo. Para resolver estos problemas es esencial definir una relación idealizada esfuerzo-deformación-tiempo.

Para analizar la estabilidad de las masas de suelo o de roca se consideran zonas de ellas limitadas por superficies potenciales de rotura, las cuales están sometidas a fuerzas que dependen de la resistencia del material a

los esfuerzos normales y de corte. Casi siempre se toma una combinación de estos esfuerzos resistentes que lleve el material al estado de falla, y entonces el análisis se conoce como de "equilibrio límite". La deformación que presente el material en la condición de falla no se tiene en cuenta para nada en éste análisis.

3.5 Ley de Hooke

La relación esfuerzo - deformación que se emplea con más frecuencia en la mecánica es la Ley de Hooke (Hooke, 1685). En su forma más sencilla, se aplica al caso de un elemento como una barra de acero o un cilindro de concreto que se somete solo a un esfuerzo axial. Esta ley establece que la deformación axial, ε_x , es proporcional al esfuerzo axial correspondiente, σ_x , de acuerdo con la expresión,

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (3.5)$$

en donde E representa el parámetro de deformación que se conoce como módulo de elasticidad. La fórmula general de la ley es la siguiente:

$$\varepsilon_x = C_1\sigma_x + C_2\sigma_y + C_3\sigma_z + C_4\tau_{yz} + C_5\tau_{zx} + C_6\tau_{xy} \quad (3.6)$$

La ecuación 3.4 establece que las componentes de deformación, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$, de un elemento son proporcionales a las componentes de esfuerzos, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$, que actúan sobre el mismo elemento.

Con ecuaciones como la 3.4 para las seis deformaciones, se plantean 36 constantes que se deben obtener en forma experimental, si no se hacen suposiciones adicionales. Se puede demostrar, sin embargo, que para materiales isotrópicos (materiales que tienen las mismas propiedades en cualquier dirección en el punto considerado), la mayoría de estas constantes son cero, mientras que las otras son interdependientes, y por tanto solo se mantienen dos constantes independientes, que son, el módulo elástico (o módulo de Young, o de deformación), E, y la relación de Poisson, μ . Con estas constantes la Ley de Hooke se escribe en la siguiente forma para las seis deformaciones:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]$$

3. RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACIÓN

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx} \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}\end{aligned}\quad (3.7)$$

La constante G en las expresiones anteriores se llama "módulo de corte", y se define como,

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (3.8)$$

Las ecuaciones 3.7 se escriben en forma matricial como sigue:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\mu/E & -\mu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\mu/E & 1/E & -\mu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\mu/E & -\mu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_Z \\ \tau_{XY} \\ \tau_{YZ} \\ \tau_{XZ} \end{Bmatrix}$$

que se representa como,

$$[\varepsilon] = [D][\sigma] \quad (3.9)$$

En términos de las deformaciones, los esfuerzos se expresan de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \varepsilon_v + 2G^* \varepsilon_x \\ \sigma_y &= \varepsilon_v + 2G^* \varepsilon_y \\ \sigma_z &= \varepsilon_v + 2G^* \varepsilon_z \\ \tau_{xy} &= G^* \gamma_{xy} \\ \tau_{yz} &= G^* \gamma_{yz} \\ \tau_{xz} &= G^* \gamma_{xz}\end{aligned}\quad (3.10)$$

En forma matricial se escribe,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}$$

donde,

λ, G = parámetros de Lamé, que se expresan con,

$$\lambda = \frac{\mu^* E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \quad (3.11)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

A veces se utilizan las siguientes relaciones entre los parámetros elásticos de un material homogéneo e isotrópico:

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)} = \frac{2(1 + \mu)G}{3(1 - 2\mu)}$$

$$E = \frac{9KG}{3K + G}$$

$$\mu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} \quad (3.12)$$

$$\frac{\lambda}{G} = \frac{2\mu}{1 - 2\mu}$$

$$\frac{1}{m_v} = \frac{(1 - \mu)E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}$$

De las ecuaciones anteriores resulta evidente que si un material satisface la Ley de Hooke, las direcciones de los esfuerzos y de las deformaciones coinciden. Además, es interesante concluir que el comportamiento idealizado de la Ley de Hooke implica:

- i) La misma respuesta del material en tensión y en compresión.
- ii) No existen esfuerzos límites o máximos que se le puedan imponer al material.
- iii) El comportamiento del material no depende del tiempo.

En otras palabras, la ley implica que un valor de esfuerzo determinado siempre produce la misma deformación, pero no indica cuanto tiempo toma para alcanzar esa deformación.

3. RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACIÓN

La dificultad que se encuentra en los suelos reales, en donde la deformación que causa un esfuerzo determinado depende de la velocidad de aplicación de la carga, se puede resolver introduciendo diferentes valores de las constantes de la deformación, E y μ , correspondientes a determinadas velocidades de carga.

Debido a que las ecuaciones de la Ley de Hooke implican la elasticidad del material ideal, éste se denomina sólido linealmente elástico, sólido elástico, y también sólido Hookeniano. Los problemas de deformación de tal sólido bajo diferentes condiciones geométricas y de esfuerzos se tratan en una rama de la mecánica teórica que se llama Teoría de la Elasticidad.

Para el acero las características de la deformación, E y μ , tienen valores constantes, iguales para carga y descarga, y son independientes de la trayectoria de esfuerzos ($E = 200000 \text{ MN/m}^2$, $\mu = 0.3$). En el hormigón la relación de Poisson, μ , es algo menor (cerca de 0,2), pero constante. El módulo de deformación, E , varía con la edad y la porosidad del concreto, y con la forma de la carga. Un concreto viejo de buena calidad sometido a carga instantánea puede presentar un módulo de 40000 MN/m^2 , pero bajo carga sostenida este valor puede descender hasta 12000 MN/m^2 .

En los suelos la relación de Poisson, μ , varía de acuerdo con el nivel de esfuerzos y el carácter de la carga, en el rango amplio de $0 < \mu < 0.5$. De acuerdo con Vèsic (1978), el módulo de deformación, E , depende de:

- i) La rata y frecuencia de la carga.
- ii) El nivel de los esfuerzos iniciales.
- iii) La trayectoria de esfuerzos.

Casi siempre es mayor para condiciones de carga cortas (condición no drenada), que para cargas de gran duración (condición drenada). Es mayor en descarga y recarga, que durante la primera carga, y casi siempre aumenta con el nivel de esfuerzos. Los valores típicos de E para los suelos son mucho menores que los del acero y el hormigón; los suelos más duros llegan hasta 200 MN/m^2 , mientras que los suelos muy blandos en condiciones drenadas pueden tener 200 kN/m^2 .

Para entender mejor la naturaleza de la deformación del sólido Hookeniano es interesante observar las características del cambio de volumen de dicho material. Cuando se suman las deformaciones axiales se obtiene,

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (3.13)$$

Si las deformaciones axiales del elemento son pequeñas la suma de las deformaciones axiales representa la deformación volumétrica del elemento considerado, que se denomina ε_v . El promedio aritmético de los esfuerzos normales representa el esfuerzo normal promedio en el punto considerado, que se denomina σ_0 . Entonces la ecuación 3.13 se puede escribir así:

$$\varepsilon_v = \frac{\sigma_0}{E_B} \quad (3.14)$$

donde E_B , es el módulo bulk, que se escribe como,

$$E_B = \frac{E}{3(1-2\mu)} \quad (3.15)$$

De la ecuación 3.13 se concluye:

- i) En un sólido Hookeniano los cambios de volumen solo los causan los cambios en el esfuerzo normal promedio.
- ii) Por tanto, la aplicación de esfuerzos de corte no causa cambios de volumen en el sólido.
- iii) Cuando $\mu = 0.5$ no hay cambios de volumen
- iv) Si se considera que la compresión isotrópica de cualquier material no puede producir expansión del volumen, la relación de Poisson nunca debe ser mayor que 0.5.

3.6 Aplicación de la Ley de Hooke a los suelos

Desde los primeros días de la Mecánica de Suelos se ha discutido hasta qué punto se justifica el uso de la Ley de Hooke para resolver los problemas de la mecánica de suelos. Aún hoy en día se pregunta: ¿Qué tan próximo es el comportamiento de los suelos reales del de un sólido elástico ideal?

Para responder en parte dicha pregunta, según Vèsic (1978) se debe considerar la curva esfuerzo- deformación de un suelo, que en forma típica es como se muestra en la Figura 3.5. Se presenta una deformación plástica apreciable que aumenta con la repetición de la carga, y la magnitud relativa de las deformaciones depende de la rata de aplicación de la carga. Aun así siempre se observa que:

3. RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACIÓN

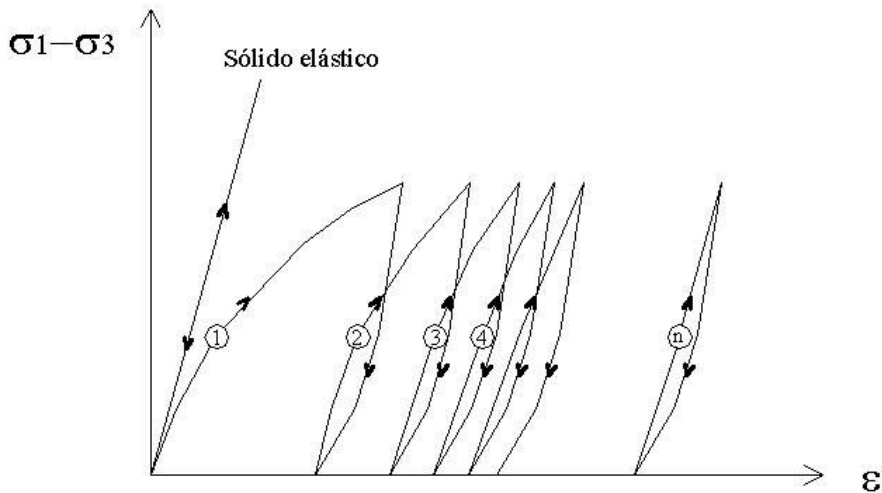


Figura 3.5. Comportamiento esfuerzo – deformación de un suelo sometido a carga repetida.

- i) Durante la primera carga casi todos los suelos presentan un comportamiento inicial esfuerzo – deformación de tipo lineal, siempre que los esfuerzos sean pequeños.
- ii) Después de un determinado número de repeticiones de carga las deformaciones plásticas desaparecen, siempre que las cargas aplicadas sean mucho menores que las cargas de falla. El último ciclo de la curva esfuerzo– deformación, que se puede repetir para cualesquiera nuevas cargas y descargas (a pesar del ciclo de histéresis inevitable) también se puede aproximar por una línea recta.

Se tienen además unas complicaciones adicionales debido a:

- i) El módulo de deformación, E , aumenta con el esfuerzo inicial de confinamiento del suelo.
- ii) La aplicación de los esfuerzos de corte puede producir cambios de volumen en los suelos.

A pesar de estas deficiencias, se puede aplicar la Ley de Hooke a los suelos en las siguientes dos situaciones:

- i) Durante la primera carga.
- ii) Después de muchas aplicaciones de una carga repetida.

La aplicación de la Ley de Hooke en todos los demás casos intermedios se justifica solo sobre la base de una similitud entre los esfuerzos y deformaciones observados, y los que se calculan con una relación esfuerzo–deformación lineal aparente, casi siempre secante.

3.7 Suelo como un sólido poroso y poroso elástico

Como se mencionó antes, el análisis con el sólido de Hooke permite encontrar la magnitud de la deformación elástica que produce una carga, pero no proporciona una respuesta sobre el desarrollo de la deformación con el tiempo, la cual en buena parte está condicionada por la velocidad con que el agua puede salir del suelo. En la Figura 3.6 se presenta la relación típica deformación – tiempo, $\varepsilon - t$, de un suelo, con una etapa inicial de carga, seguida por la descarga

Con el fin de obtener expresiones matemáticas de esta clase de relaciones es necesario definir un sólido ideal más complejo. El más simple de estos sólidos es el “sólido poroso elástico”, el cual simula el comportamiento de una esponja con vacíos muy pequeños interconectados y llenos con agua.

El esqueleto de este sólido se supone que tiene un comportamiento elástico igual al sólido de Hooke. De esta manera sus deformaciones son proporcionales a sus esfuerzos efectivos, que son la diferencia entre los esfuerzos totales y neutros. Éstos últimos son proporcionales a las cabezas de presión que se obtienen con la Ley de Darcy para el flujo del agua a través de los vacíos de un medio poroso ideal.

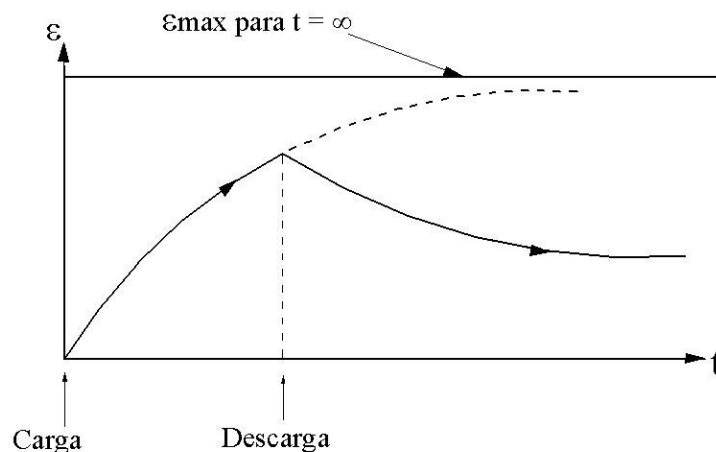


Figura 3.6. Relación típica deformación – tiempo, $\varepsilon - t$, de un suelo.

3. RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACIÓN

La rama de la mecánica que trata los problemas de deformación de este sólido se llama "Teoría de Consolidación". El sólido ideal que define esta teoría, algunas veces se llama "sólido Kelvin" (o sólido de Voigt), y se simula mediante un modelo mecánico que consiste de un resorte de constante k , y un amortiguador de coeficiente λ , colocados en paralelo, como se muestra en la Figura 3.7a. Este cuerpo simula una relación básica deformación - tiempo, que se muestra en la Figura 3.7b.

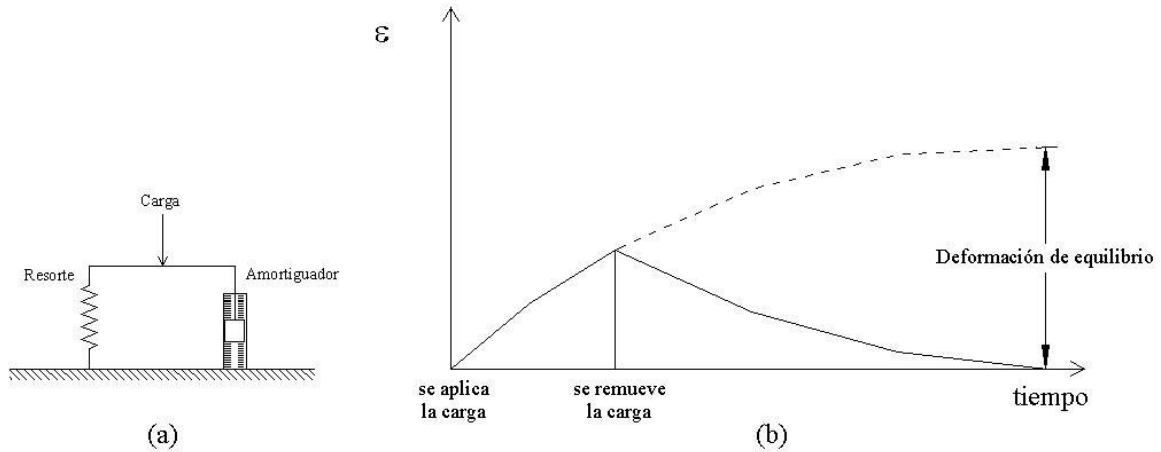


Figura 3.7: a) sólido de Kelvin; b) diagrama básico deformación - tiempo.

Para simular comportamientos del suelo más complejos se pueden usar diferentes modelos de sólidos porosos viscosos. Estos se caracterizan por esqueletos que fluyen bajo los esfuerzos efectivos crecientes. Un ejemplo de esta clase es el "cuerpo de Burger", el cual se puede simular con el modelo mecánico que se muestra en la Figura 3.8.

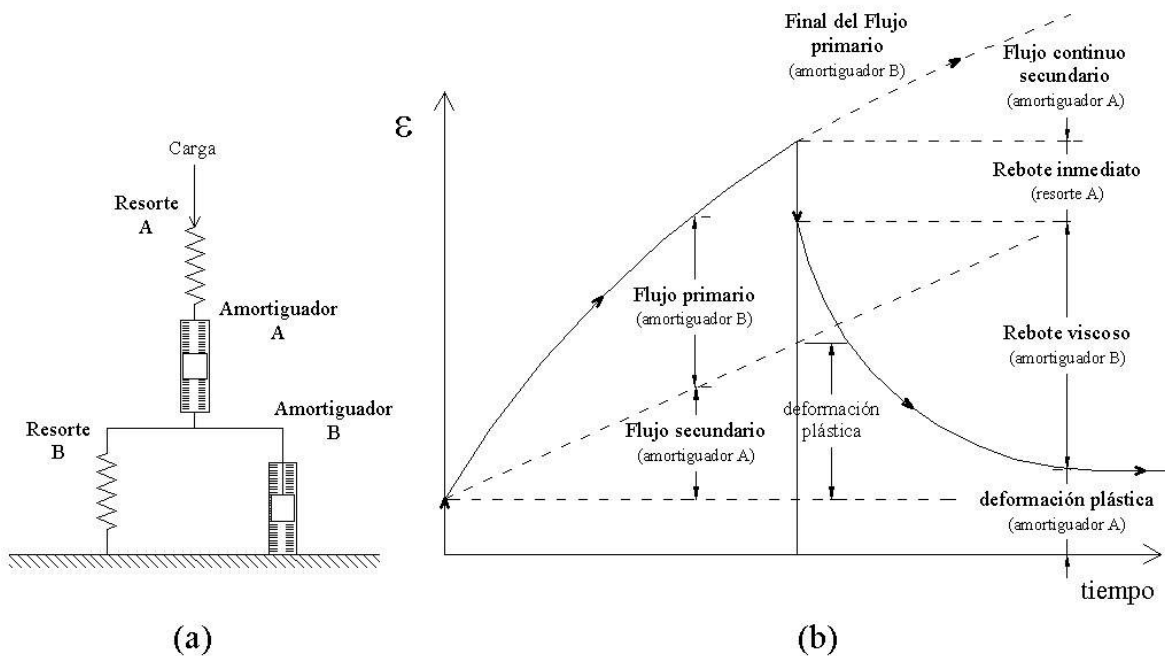


Figura 3.8. a) Modelo del cuerpo de Burger; b) Diagrama básico deformación-tiempo.

El estudio de éstos modelos para materiales complejos se tratan en la rama de la mecánica que se conoce como Viscoelasticidad, y de manera más general como Reología. No obstante, el desarrollo de estas disciplinas no ha avanzado lo suficiente como para suministrar respuestas utilizables en la ingeniería geotécnica práctica.

3.8 Análisis no lineal de la relación esfuerzo - deformación

Antes del desarrollo de los computadores electrónicos no era posible realizar análisis de esfuerzos en masa de suelo o roca para relaciones esfuerzo - deformación diferentes de la "linealmente elástico". Ahora, debido a la disponibilidad de los procesadores de alta velocidad y técnicas poderosas de análisis numérico, como el método de elementos finitos, se pueden emplear relaciones esfuerzo-deformación no lineales.

Una relación no lineal simple y práctica que se puede utilizar con el método de los elementos finitos, es la hiperbólica. Kondner (1963) demostró que las relaciones no lineales esfuerzo-deformación, tanto para las arcillas como para las arenas, se pueden aproximar por una hipérbola con la siguiente expresión:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{\epsilon}{a+b*\epsilon} \quad (3.16)$$

3. RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACIÓN

En 3.16, σ_1 y σ_3 son los esfuerzos principales mayor y menor, ε es la deformación axial, y, a y b son constantes que se determinan con los resultados del ensayo.

Tanto a como b se pueden visualizar con facilidad. Como se aprecia en la Figura 3.9, a es el valor inverso del módulo tangente inicial, E_i , y b es el inverso del valor asintótico de la diferencia de esfuerzos, $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$, a la que la curva hiperbólica tiende para una deformación infinita. Es importante tener en cuenta que el valor de E_i que se obtiene de esta manera no es igual al del ensayo, que es el resultado experimental, pero es similar a éste cuando la expresión hiperbólica se ajusta bien a los datos del ensayo.

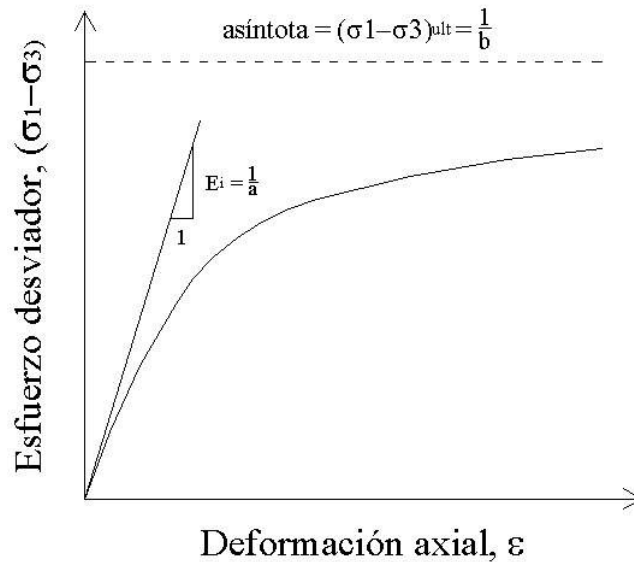


Figura 3.9. Curva hiperbólica que representa la relación esfuerzo – deformación.

Kondner y Zelasko (1963) demostraron que los valores de los coeficientes a y b se pueden determinar con facilidad si se dibujan los datos esfuerzo-deformación del ensayo sobre ejes transformados como se indica en la Figura 3.10, y la Ecuación 3.16 se escribe de la siguiente forma,

$$\frac{\varepsilon}{(\sigma_1 - \sigma_3)} = a + b * \varepsilon \quad (3.17)$$

donde a y b son respectivamente el intercepto y la pendiente de la línea recta resultante. De esta manera, cuando se dibujan los datos esfuerzo-

deformación en la forma que se indica en la Figura 3.10 se pueden determinar fácilmente los valores de los parámetros a y b que corresponden al mejor ajuste entre la hipérbola y los resultados del ensayo.

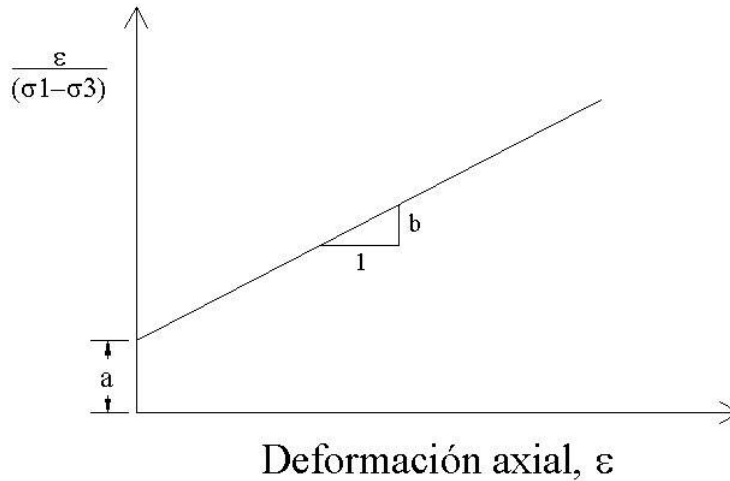


Figura 3.10. Curva transformada esfuerzo-deformación.

Luego de realizar numerosas pruebas Kondner y Zelasko (1963) encontraron que en general solo se requiere dibujar dos puntos para trazar la línea que corresponde a la mejor ecuación de la hipérbola. Estos dos puntos son los de los porcentajes del 70 y 95 de la diferencia de esfuerzos en la falla, $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$.

Casi siempre se encuentra que el valor asintótico $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ es un poco mayor que $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$, que es la resistencia a la compresión del suelo. Estos dos valores se pueden relacionar por medio del factor R_f , mediante la siguiente expresión:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = R_f * (\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$$

El factor R_f se halla entre 0.75 y 1.0, y es independiente de la presión de confinamiento. Si se expresan los parámetros a y b en términos del módulo tangente inicial y de la resistencia a la compresión, la Ecuación 3.16 se puede escribir,

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{\varepsilon}{\left[\frac{1}{E_1} + \frac{\varepsilon * R_f}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f} \right]} \quad (3.18)$$

3. RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACIÓN

Tanto los valores del módulo tangente inicial como la resistencia a la compresión de los suelos dependen de la presión de confinamiento que se emplee en los ensayos, con excepción de los resultados de los ensayos no consolidados no drenados. Los resultados experimentales indican que la relación entre el módulo tangente inicial y la presión de confinamiento se puede expresar como,

$$E_i = k * p_a * \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (3.19)$$

donde, p_a es la presión atmosférica dada en las mismas unidades de esfuerzo que E_i y σ_3 , k es un módulo, y n es un exponente que define la rata de variación de E_i con σ_3 . Los valores de los parámetros k y n se determinan con los resultados de una serie de ensayos que se dibujan en una gráfica de $\log E_i$ vs. σ_3 , y luego se traza la mejor línea recta, como se aprecia en la Figura 3.11.

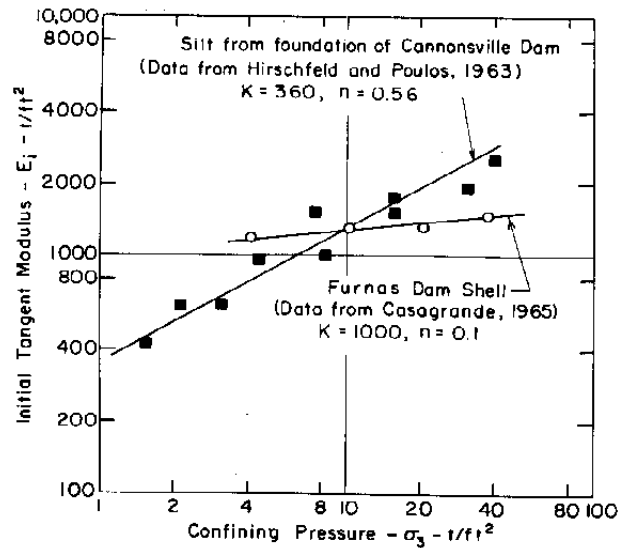


Figura 3.11. Variación del módulo tangente inicial con la presión de confinamiento, con las condiciones del ensayo de compresión triaxial drenado (Duncan y Chang, 1970).

Si se supone que la falla ocurrirá sin cambios en el valor de σ_3 , la relación entre la resistencia a la compresión y la presión de confinamiento se puede expresar en función de los parámetros del criterio de falla de Mohr-Coulomb como,

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = \frac{2 * c * \text{Cos} \phi + 2 * \sigma_3 * \text{Sen} \phi}{1 - \text{Sen} \phi} \quad (3.20)$$

donde, c y ϕ son los parámetros de resistencia al corte de Morh-Coulomb.

Las ecuaciones 3.18, 3.19 y 3.20 permiten relacionar los esfuerzos, las deformaciones, y la presión de confinamiento con los cinco parámetros, k , n , c , ϕ , γ , R_f .

3.9 Referencias

Duncan, J.M. and Chang, Ch-Y. (1970). **Nonlinear analysis of stress and strain in soils**. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, American Society of Civil Engineers, Vol. 96, No. SM5, Proc. Paper 7513, pp1629-1653, New York.

Kondner, R.L. (1963). **Hyperbolic Stress-Strain Response: Cohesive Soils**. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, American Society of Civil Engineers, Vol. 89, No. SM1, Proc. Paper 3429, pp 115-143, New York.

Kondner, R.L., and Zelasko, J.S. (1963). A Hyperbolic Stress-Strain Formulation for Sands. Proceedings, 2nd Pan-American Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering, Brazil, Vol. I, 1963, pp 289-324.

Vesic A. (1978). Notas de clase de Fernando Parra V. University of Duke.

Bogotá, Marzo de 2002

LISANDRO BELTRÁN MORENO
Profesor Emérito U.N.